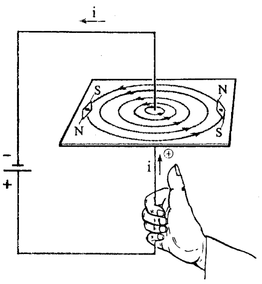
第十八章 電流的磁效應

本章的地位：在介紹過靜電、靜磁及電流之後，本章要介紹電與磁之間的關係，這裡可以說和前面有關電與磁的關係不大，可是卻是許多同學覺得困難的地方，原因就在於公式很多並且代數也很多，更需要有很強的數學背景，所以在這一章不僅要認真聽講，更要自行整理公式，消化成為自己的東西才行。

18-1 電流所產生的磁場

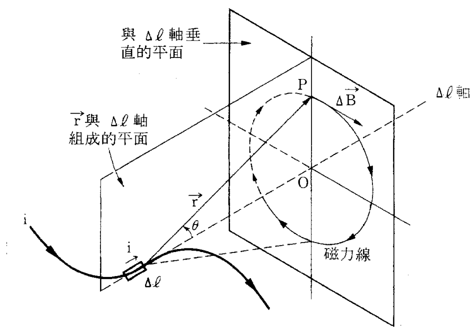
在 1820 年，丹麥物理學家厄司特發現通有電流的導線附近有磁場，從此展開了電磁現象的研究，經由必歐、沙伐、安培、法拉第等人的研究，最後由馬克士威在 1864 年完成完整的電磁場理論。



厄司特的發現只是簡單的說明導線附近會產生磁場，方向可如右圖所示：

至於磁場分布定量上的定律是由必歐及沙伐實驗發現，我們由右下圖中來解釋：

取一小段導線（長Δℓ）來分析，當通以電流 i 時，會在 P 點產生ΔB 的磁場，方向可用安培右手定則來定，這是實驗的結果（拇指為電流方向、四指彎曲的切線為磁場方向），至於量值方面，可以用想像得到（當然實際上是要經過精密實驗得到的）：



1. $\Delta B \propto i$

2. $\Delta B \propto \Delta \ell$

3. $\Delta B \propto \sin\theta$

4. $\Delta B \propto \dfrac{1}{r^2}$

綜合上面的幾個關係，可以寫下必歐－沙伐定律：

$$\boxed{\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\sin\theta}{r^2}\Delta \ell}$$

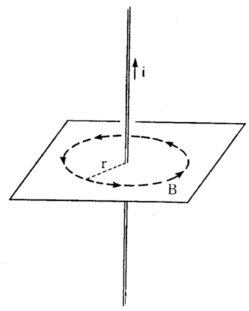
其中μ_0是真空中的磁導率（常數），其值為$4\pi\times10^{-7}$特士拉–公尺/安培，磁場的單位為特士拉。

至於μ_0在馬克士威的方程式中有明確的定義，$c=\sqrt{\dfrac{1}{\mu_0\varepsilon_0}}$，c 為真空中的光速，$\varepsilon_0$為真空中的容電率，也因此導出了光是一中電磁波。

上面的公式中，若$\theta=0$，則磁場為零，代表在電流的延伸線上不會有磁場。

18-1(1)　長直導線電流的磁場

必歐–沙伐定律真正運用在實際的電磁學中必須經過微積分，如果我們現在取直導線為無限長，則將上式積分可以得到：

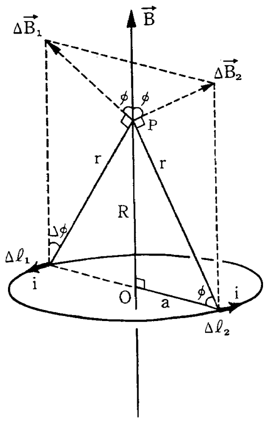


$$\boxed{B=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{r}}$$

這個公式要背必須先記一些微積分的基礎概念，否則死記很容易會和後面的公式混淆，首先式子中的$\Delta\ell$因為我們取無限長的導線，所以從$-\infty$積到$+\infty$，因此從式子中消失；而$\sin\theta$也因為所取的角度從 0 到π，也從式子中消失；至於$\dfrac{1}{r^2}$積分之後也變成$\dfrac{1}{r}$，這樣上式就變得容易記些了。

安培定律：如果我們把上式改寫成：$2\pi rB=\mu_0 i$，則有另一層意義：在某一封閉的曲線內（曲線上磁場大小相等），其面積與磁場強度的乘積等於μ_0乘上內部所有的電流；這個推廣稱為電流磁效應的**安培定律**，與後面所提的安培定律有些不同。

18-1(2)　圓線圈和螺線管電流的磁場



接下來討論單一圓形線圈載有電流時所產生的磁場，如右圖：

首先看$\Delta\ell_1$所產生的磁場ΔB_1，由於對稱的原因我們指取它的垂直分量：

$$\Delta B_1 \cos\phi = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\Delta\ell}{r^2}\cos\phi$$

又 $\cos\phi = \dfrac{a}{r}$

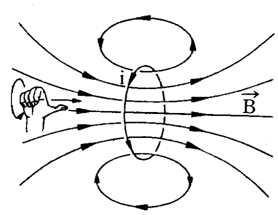
所以當我們取Δℓ來積分時會得到直接將Δℓ帶入 $2\pi a$ ：

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i2\pi a}{r^2}\frac{a}{r} \\ &= \frac{\mu_0 i a^2}{2r^3} \\ &= \frac{\mu_0 i a^2}{2\left(a^2+R^2\right)^{3/2}} \end{aligned}$$

上式中如果代入 R=0（圓心處），則又可寫成：

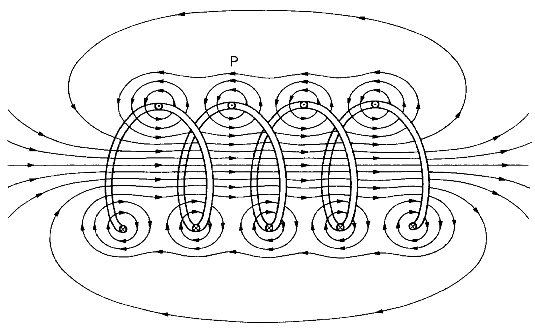
$$\boxed{B = \frac{\mu_0 i}{2a}}$$

※請特別和前面長直導線的磁場公式比較區分一下。



至於單一線圈所產生的磁場方向可由右圖來表示（右手定則）：

接下來要介紹螺線管，螺線管可視為由許許多多個單一圓線圈所組成，分成內部及外部來討論；在內部，由於每一段導線所產生的磁場在內部的總和會是均勻且平行管的中心軸（如右圖），所以當我們求螺線管的磁場時指的是內部的磁場大小；在外部，因為各導線所產生的磁場有互相抵消的趨勢，所以不去討論它。



至於螺管線內部的磁場大小的數量化，可由以下討論得到：內部磁場大小應該與電流大小成正比，另外也應該與線圈密度成正比（單位長度內的線圈匝數），這是在假設螺管線圈長度遠大於導線直徑的情形下所得到的，且不討論兩端不均勻的磁場，於是寫下公式：

$$\boxed{B = \mu_0 in}$$

※請由上式的單位中去推論公式是否正確？

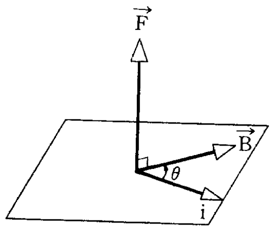
18-2　載電流導線在磁場中所受的力

上一節所說的是關於電流產生的磁場，這一節要討論的是電在磁場中流動時會有什麼現象？反過來討論磁對電的影響。

安培經過實驗及理論的分析得到$\Delta\ell$導線，若帶有電流 i 在磁場 B 中，則會有受力大小為

$$\boxed{\Delta F = iB\Delta\ell}$$

這個定律也稱為安培定律，其中受力的方向可以用安培右手掌定則來決定，拇指方向為電流方向，四指（伸直）為磁場方向，則手掌方向為導線的受力方向；用這個方法的條件是電流與磁場必須垂直，但若不是垂直呢？則磁場必須取垂直於電流方向的分量，如右圖：則取垂直分量為$B\sin\theta$，所以上面的公式又可以寫成：



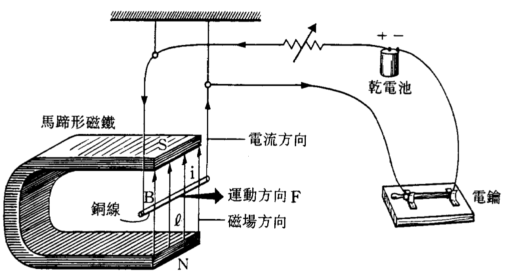
$$\Delta F = i\Delta\ell B\sin\theta$$

如果現在取一段長為 L 的長直導線，放置在一個均勻的磁場 B 中，並通以 i 的電流，則此導線的受力則為：

$$\boxed{F = iLB\sin\theta}$$

這裡還可以用另一種向量的記法（外積）：

$$\vec{F} = L\vec{i} \times \vec{B}$$



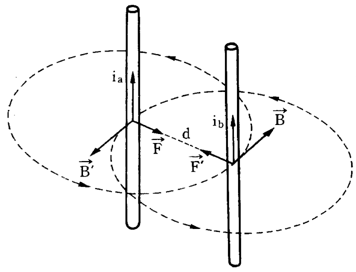
右圖為一個常考的圖形，列為參考。

18-2(1)　兩平行載電流導線之間的力

實驗上發現，當兩條導線接通以電流時會產生相互排斥或吸引的作用力，這個作用力並不受金屬的屏蔽作用影響，事實上也證實兩導線雖然有電流通過，卻不代表本身會帶電，所以這個作用力並非靜電的庫侖作用力。

1825 年安培研究發現兩導線之間的力量與下列相關：

1. 與各自的電流 i_a、i_b成正比
2. 與兩者的距離 d 成反比
3. 與兩者的長度 L 成正比



於是寫下下列公式:

$$\boxed{F=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2i_a i_b L}{d}}$$

這個公式可由右上圖來分析，先假設兩導線的電流為同方向（分別為 i_a、i_b)，距離為 d，導線長為 L，則 A 導線在 B 的位置產生了磁場大小為：

$$B=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_a}{d}$$

接著再討論這個磁場對 B 導線的作用力，運用安培定律可以得到：

$$\begin{aligned}F' &= i_b L B\sin\frac{\pi}{2}\\ &= i_b L\left(\frac{\mu_0 i_a}{2\pi d}\right)\\ &= \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_a i_b}{d}L\end{aligned}$$

而相反的討論，B 導線對 A 導線的施力大小也是相同，只是方向都是吸引的，所以上式也滿足牛頓第三運動定律 $F=F'$。

$$\boxed{F=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_a i_b}{d}L}$$

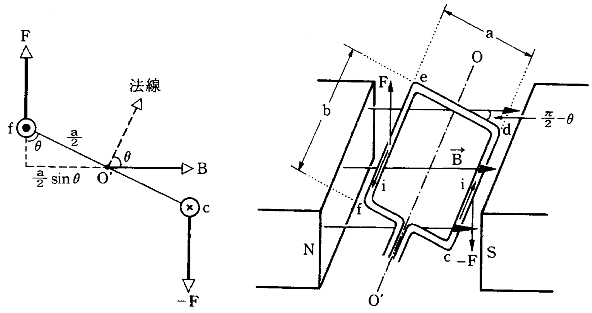
若導線所帶的電流方向相反，則推論得到其間的作用力為排斥力。

前面第十七章時介紹過電流的單位為安培，卻沒有真正定義安培，在這裡可以用上面的公式來定義：兩載有相同電流的平行長直導線，在真空中相距 1 公尺，而導線上每公尺所受的作用力為 2×10^{-7} 牛頓，則導線上的電流稱為 1 安培。

18-2(2) 導電線圈在磁場中所受的力及力矩

接下來要介紹安培定律另一個常見運用，便是導線在磁場中受力所產生的力矩，如右圖所示：

將一個矩形的線圈放置於固定磁場中，ef 段及 cd 段皆受力：



$$F = iBb$$

這兩個力方向相反，如圖左所示，這兩個力針對 O 點會產生相同方向（順時針）的力矩，且力矩的大小皆為：

$$\tau = F\frac{a}{2}\sin\theta$$

所以總和的力矩為：

$$\tau = 2\times F\frac{a}{2}\sin\theta = iBab\sin\theta$$

又 ab 為矩形的面積 A，所以上式可以改寫成：

$$\boxed{\tau = iBA\sin\theta}$$

由於力矩也是向量，這裡可以用向量的方式來表示：

$$\boxed{\vec{\tau} = i\vec{A}\times\vec{B}}$$ A 的方向為法線方向。

若線圈共繞總數 N 匝，則每匝都受到相同的力矩，所以總力矩為：

$$\boxed{\vec{\tau} = Ni\vec{A}\times\vec{B}}$$

※ 這個公式的記法：力矩與線圈匝數、線圈面積、電流、磁場都成正比，所以全部都乘起來，最重要的是要判斷面積與磁場的夾角。

上面的公式又可以擴展到其他非規則性線圈，只要把 A 代入線圈的總面積即可，這就可以利用到螺線管的題目上了。

18-3　帶電質點在磁場中的運動

前面所討論的是載流導線在磁場中受力情形，現在要討論帶電質點在磁場中的運動情形，其實方式和安培定律相同，分析如下：

$F = i\ell B\sin\theta$：安培定律

將上式作一個技巧性的改變：

$$F = i\ell B\sin\theta = \frac{q}{\Delta t}\ell B\sin\theta = q\frac{\ell}{\Delta t}B\sin\theta = qvB\sin\theta$$

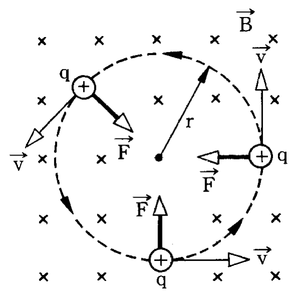
於是我們可以將上式解釋為：帶電質點（電量為 q）在磁場中以速度 v 運動時，所受到的力為：

$$\boxed{F = qvB\sin\theta}$$

至於角度及力方向的判斷則由安培定律來決定即可，不需另外背公式，v 的方向為正電荷流動的方向（電流方向），上式也可寫成向量式：

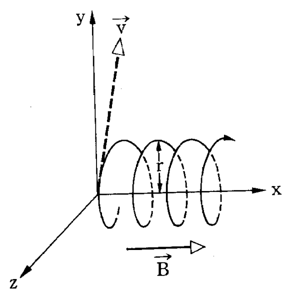
$$\boxed{\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}}$$

這裡比較常見的題型為帶電質點在均勻磁場中作等速率圓周運動（$\theta = \frac{\pi}{2}$），如右下圖：因為受力方向始終與質點運動方向垂直，這是圓周運動的一個重要關係，若質點質量為 m，則作以下計算：



$$F = qvB = m\frac{v^2}{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{r = \frac{mv}{qB}}\text{迴旋半徑}$$



$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB}}\text{迴旋週期}$$

$$\Rightarrow \boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}}\text{迴旋頻率}$$

上式中有一個非常重要的關係，就是均勻磁場中的任何帶電質點，只要荷質比 $\frac{q}{m}$ 相同，其迴旋頻率及週期一定會相等，與速度無關，這一點後面會

用到荷質比的觀念，請特別注意。

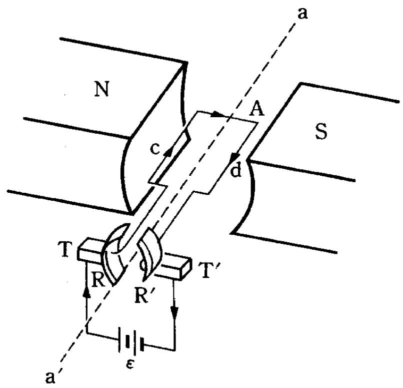
如果質點速度不完全垂直磁場，則可以分為垂直及平行方向的速度分量來討論，如右圖：分別令其為$v_{\perp}$（沿 y 軸）及$v_{//}$（沿 x 軸），由於垂直方向的運動會使得質點受力方向為-z 軸方向，而 x 方向不受力為等速度運動，於是造成質點向 x 軸方向作半徑為$\dfrac{mv_{\perp}}{qB}$的螺旋運動。

18-4　電磁鐵

在前面螺管線圈的討論中，線圈內部並不存在物質（真空），所以要代入真空的磁導率μ_0，但是如果我們在內部放入磁導率較大的物質（如軟鐵棒），則產生的磁場會變得很大，變成一個磁鐵棒，這種裝置稱為電磁鐵；它和永久磁鐵最大的不同處在於電磁鐵的磁性會隨著電流的大小而隨時改變，不會有【殘磁】現象，也就是磁場不會滯留在軟鐵棒上，這在應用上是相當重要的裝置，生活上也常需用到，如：電話聽筒、話筒、電動機、起重機…

18-5　直流電動機

電動機是安培定律在生活上的應用，其中最重要的就是馬達，以下就運用圖形來解釋其作用原理：



圖中電流流經 c 段導線時所產生的力向下，流經 d 段導線所產生的力向上，使得矩形線圈作逆時針方向的旋轉，當轉過 1/4 週期後，由於電刷的作用使得導線上沒有電流通過，此時線圈依靠慣性繼續逆時針旋轉，當 c、d 兩段導線互換位置後，電流卻又與原來方向相同，使線圈繼續以逆時針方向旋轉，於是線圈便一直旋轉下去，將電能轉換為功而輸出。

以上所說的是直流電動機，生活上常用的是交流電動機，原理上仍然與直流電動機相差不遠，只是其電刷裝置必須配合交流電的頻率，在此不再詳述。